۴ . ۳ تابعهای صعودی و نزولی

قضیهٔ مقدار میانگین، که در قسمت قبل به بررسی آن پرداختیم، اکنون این امکان را فـراهم می‌آورد که از مفهوم مشتق برای تعیین ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع استفاده نماییم.

تعریف : تابع f را بر بازهٔ I **صعودی** نامیم در صورتی که به ازای هر $x, x' \in I$، $x < x'$ نتیجه دهد که $f(x) \leq f(x')$.

اگر $x < x'$ نتیجه دهد که $f(x) < f(x')$ ، آنگاه f را بر بازهٔ I **صعودی اکید** می‌نامیم.

بنابراین اگر f بر I صعودی اکید باشد، نمودار آن به طور مداوم بالا می‌رود. از طـرف دیگـر، اگر f بر I صعودی باشد، نمودار آن هرگز پایین نمی‌آید امّا ممکن است«بازه‌هـای ثبـات» وجـود داشته باشد که در آن‌ها نمودار تابع به قطعه خطی افقی تقلیل می‌یابد. به عنوان مثال، هـر یـک از توابع نشان داده شده در شکل‌های زیر بر $[a, b]$ صعودی هستند ولی فقـط در شـکل (الـف) تـابع صعودی اکید است.

شکل۴ . ۲۱

تعریف : تابع f را بر بازهٔ I **نزولی** نامیم در صورتی که به ازای هر $x, x' \in I$، $x < x'$ نتیجه دهد که $f(x) \geq f(x')$.

اگر $x < x'$ نتیجه دهد که $f(x) > f(x')$ ، آنگاه f را بر بازهٔ I **نزولی اکید** می‌نامیم.

بنابراین اگر f بر I نزولی اکید باشد، نمودار آن به طور مداوم پایین می‌آید. از طرف دیگر، اگر f بر I نزولی باشد، نمودار آن هرگز بالا نمی‌رود امّا ممکن است «بازه‌های ثبات» وجود داشته باشد که در آن‌ها نمودار تابع به قطعه خطی افقی تقلیل می‌یابد. به شکل زیر توجه نمایید.

شکل۴ . ۲۲

از روی تعریف‌های بالا دیده می‌شود که اگر تابع f بر روی بازه‌ای صعودی اکید (نزولی اکید) باشد، آنگاه روی آن بازه صعودی (نزولی) است.

تعریف : تابعی را که بر بازهٔ I صعودی اکید، نزولی اکید، صعودی یا نزولی باشد، بر I **یکنوا** می‌نامیم.

مثال ۱۹ : (۱) تابع $f(x)=x^3$ روی R صعودی اکید است.

(۲) تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$ در $(-\infty,0]$ نزولی (اکید) و در $[0,+\infty)$ صعودی (اکید) است.

(۳) تابع $g(x)=x^2$ در $(-\infty,0]$ نزولی (اکید) و در $[0,+\infty)$ صعودی (اکید) است.

(۴) تابع $h(x)=[x]$ روی R صعودی است.

(۵) تابع $k(x)=\dfrac{1}{x}$ در $(0,+\infty)$ و در $(-\infty,0)$ نزولی (اکید) است ولی در دامنه‌اش یکنوا نیست.

(۶) تابع $f(x)=\begin{cases}1\,, & x \text{ منطق} \\ 0\,, & x \text{ اصم}\end{cases}$ روی هیچ بازه‌ای یکنوا نیست.

حل. (۱) اگر $x,x'\in R$ ، $x<x'$ آنگاه بدیهی است که $x^3<x'^3$ ، یعنی، $f(x)<f(x')$ و لذا تابع f بر R صعودی اکید است. به شکل زیر توجه نمایید ؛

شکل۴ . ۲۳

(۲) نمودار تابع $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$ در شکل زیر نشان داده شده است ؛

شکل۴ .۲۴

فرض کنیم $x, x' \in [0,+\infty)$ و $x < x'$. می‌توان نوشت

$$f(x) < f(x') \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x|+1} < \frac{|x'|}{|x'|+1} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} < \frac{x'}{x'+1}$$
$$\Leftrightarrow x(x'+1) < x'(x+1) \Leftrightarrow xx'+x < xx'+x' \Leftrightarrow x < x'$$

و لذا نتیجه می‌گیریم که تابع f بر $[0,+\infty)$ صعودی اکید است.

فرض کنیم $x, x' \in (-\infty,0]$ و $x < x'$. می‌توان نوشت

$$f(x) > f(x') \Leftrightarrow \frac{|x|}{|x|+1} > \frac{|x'|}{|x'|+1} \Leftrightarrow \frac{-x}{-x+1} > \frac{-x'}{-x'+1}$$
$$\Leftrightarrow -x(-x'+1) > -x'(-x+1) \Leftrightarrow xx'-x > xx'-x' \Leftrightarrow$$
$$-x > -x' \Leftrightarrow x < x'$$

و لذا نتیجه می‌گیریم که تابع f بر $(-\infty,0]$ نزولی اکید است

(۳) نمودار تابع g در شکل زیر نشان داده شده است.

شکل ۴ . ۲۵

فرض کنیم $x, x' \in (-\infty,0]$ و $x < x'$. در این صورت، با توجه به این که x منفی و x' کوچکتر یا مسای با صفر است، داریم

$$x < x' \Leftrightarrow -x > -x' \Leftrightarrow (-x)^2 > (-x')^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 > x'^2 \Leftrightarrow g(x) > g(x')$$

و لذا تابع g بر $(-\infty,0]$ نزولی اکید است

فرض کنیم $x, x' \in [0,+\infty)$ و $x < x'$. بدیهی است که

$$x < x' \Leftrightarrow x^2 < x'^2 \Leftrightarrow g(x) < g(x')$$

یعنی تابع g بر $[0,+\infty)$ صعودی اکید است. در اینجا دیده می‌شود که تابع g بر R یکنوا نیست، زیرا به عنوان مثال از $-1 < 2$ نتیجه می‌شود که $g(-1) < g(2)$ ولی از $-5 < 1$ نتیجه می‌شود که $g(-5) > g(1)$.

(۴) نمودار تابع h در شکل زیر نشان داده شده است.

شکل ۴ . ۲۶

فرض کنیم $x, x' \in R$ و $x < x'$. اگر عددی صحیح مانند n وجود داشته باشد به طوری که $n \le x, x' < n+1$، آنگاه بدیهی است که $[x]=[x']$ و لذا $h(x) = h(x')$. در غیر این‌صورت، یعنی اگر $n \le x < n+1$ و $m \le x' < m+1$ که در آن n, m دو عدد صحیح بوده و $n < m$، خواهیم داشت $h(x) < h(x')$.

بنابراین تابع h بر R صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

(۵) نمودار تابع k در شکل زیر نشان داده شده است.

شکل ۴ . ۲۷

فرض کنیم $x, x' \in (0, +\infty)$ و $x < x'$. واضح است که

$$x < x' \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x'} \Leftrightarrow k(x) > k(x')$$

یعنی تابع k بر $(0, +\infty)$ نزولی اکید است.

همچنین اگر $x, x' \in (-\infty, 0)$ و $x < x'$، آنگاه

$$x < x' \Leftrightarrow -x > -x' \Leftrightarrow \frac{1}{-x} < \frac{1}{-x'}$$
$$\Leftrightarrow -k(x) < -k(x') \Leftrightarrow k(x) > k(x')$$

و لذا تابع k بر $(-\infty,0)$ نیز نزولی اکید است. توجه کنید که تابع k بر دامنه‌اش یکنوا نیست، زیرا به عنوان مثال از $-5<4$ نتیجه می‌شود که $k(-5)<k(4)$ ولی از $-5<-4$ نتیجه می‌شود که $k(-5)>k(-4)$.

(۶) از این مطلب، استفاده می‌کنیم که بین هر دو عدد حقیقی حداقل یک عددمنطق و حداقل یک عدد اصم وجود دارد.

اکنون بازه‌ای مانند $I=(a,b)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x_1,x_2\in I$، $x_1<x_2$، x_1 منطق و x_2 اصم باشد. پس $f(x_1)=1,\ f(x_2)=0$. دیده می‌شود که

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

سپس فرض کنیم $x'_1,x'_2\in I$، $x'_1<x'_2$، x'_1 اصم و x'_2 منطق باشد. پس $f(x'_1)=0,\ f(x'_2)=1$. دیده می‌شود که

$$x'_1<x'_2 \Rightarrow f(x'_1)<f(x'_2).$$

بنابراین تابع f بر بازهٔ I نه صعودی است و نه نزولی.

قضیهٔ ۱۵ : فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت

(الف) اگر به ازای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)>0$ آنگاه f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

(ب) اگر به ازای هر $x\in(a,b)$، $f'(x)<0$ آنگاه f بر $[a,b]$ نزولی اکید است.

اثبات. (الف) فرض کنیم x_1 و x_2 دو نقطهٔ دلخواه در $[a,b]$ باشند به طوری که $x_1<x_2$. در این صورت f بر $[x_1,x_2]$ پیوسته بوده و بر (x_1,x_2) مشتق‌پذیر می‌باشد. از قضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌شود که نقطه‌ای مانند c در (x_1,x_2) وجود دارد به طوری‌که

$$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

چون $x_1<x_2$ پس $x_2-x_1>0$. همچنین، بنابر فرض $f'(c)>0$. پس $f(x_2)-f(x_1)>0$ و لذا $f(x_2)>f(x_1)$. بنابراین نشان داده‌ایم که اگر $x_1,x_2\in[a,b]$ و $x_1<x_2$، آنگاه $f(x_1)<f(x_2)$. نتیجه می‌گیریم که f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

(ب) با استدلالی مشابه (الف) به عنوان تمرین ثابت نمایید.

نکتهٔ ۱ : فرض کنیم تابع f روی بازه‌هایی به شکل $(-\infty,a]$ یا $[a,b]$ و یا $[b,+\infty)$ پیوسته باشد. برای اثبات صعودی اکید بودن f، کافی است f' به ترتیب روی $(-\infty,a)$ یا (a,b) و یا

$(b,+\infty)$ موجود و مثبت باشد. استدلال مشابهی را می‌توان در مورد نزولی اکید بودن بکار برد. به عنوان مثال فرض کنیم تابع f بر $[b,+\infty)$ پیوسته و بر $(b,+\infty)$ مشتق‌پذیر و مثبت باشد. اگر $x_1, x_2 \in [b,+\infty)$ و $x_1 < x_2$، آنگاه با بکار بردن قضیهٔ ۱۵ برای بازهٔ $[x_1, x_2]$ داریم $f(x_1) < f(x_2)$. بنابراین تابع f بر $[b,+\infty)$ صعودی اکید است.

نکتهٔ ۲ : (۱) فرض کنیم روی بازهٔ I، $f' \geq 0$. در این صورت f بر I صعودی است.

(۲) فرض کنیم روی بازهٔ I، $f' \leq 0$. در این صورت f بر I نزولی است.

به عنوان مثال (۱) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $x_1, x_2 \in I$ و $x_1 < x_2$. حال تابع f بر $[x_1, x_2]$ پیوسته و بر (x_1, x_2) مشتق‌پذیر است و لذا بنابر قضیهٔ مقدار میانگین نقطه‌ای مانند $c \in (x_1, x_2)$ وجود دارد به طوری‌که $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$، یعنی، $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$. اما $x_2 - x_1 > 0$ و بنابر فرض $f'(c) \geq 0$ ، پس $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ ، یعنی، $f(x_2) \geq f(x_1)$. خلاصه

$$\forall\, x_1, x_2 \in I,\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

و بنابراین f بر I تابعی صعودی (و نه لزوماً صعودی اکید) است.

نکتهٔ ۳ : (۱) فرض کنیم تابع f روی بازه‌های باز (a, c) و (c, b) صعودی (صعودی اکید) بوده و در نقطهٔ c پیوسته باشد. در این صورت f روی بازهٔ (a, b) صعودی(صعودی اکید) است.
(۲) فرض کنیم تابع f روی بازه های باز (a,c) و (c,b) نزولی(نزولی اکید) بوده و در نقطه c پیوسته باشد.در این صورت f روی بازه (a,b) نزولی (نزولی اکید) است.

مثال ۲۰ : (i)حدود m را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ صعودی اکید باشد.

(ii)تابع $f(x) = \sin 3x - 27\sin x$ با دامنهٔ تعریف $[0, 2\pi]$ در چه بازه‌ای صعودی اکید است ؟

(iii) تابع $f(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$ در بازه‌های $I_1 = (0,1)$ و $I_2 = (1,2)$ چه وضعیتی دارد ؟

(iv) تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \ x \leq 0 \\ 0 & , \ 0 < x < 1 \\ x^2 - 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$ در دامنهٔ تعریف خود چه وضعیتی دارد ؟

(v) تابع $f(x)=|2x-4|+|3x-9|$ در دامنهٔ تعریف خود چه وضعیتی دارد ؟

(vi) تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & , \ x<-1 \\ 0 & , \ -1\le x\le 0 \\ arc\,tg\,x & , \ x>0 \end{cases}$ در دامنهٔ تعریف خود چه وضعیتی دارد؟

حل. (i) شرط آنکه تابع f صعودی اکید باشد آن است که $f'>0$. امّا

$$f'(x)=3x^2-2(m+2)x+3$$

و شرط آنکه هموارهٔ $f'(x)>0$ آن است که مبین آن منفی باشد، یعنی $\Delta<0$. داریم

$$\Delta=4(m+2)^2-36 \quad \text{و} \quad \Delta'=0 \Leftrightarrow (m+2)^2-9=0 \Leftrightarrow$$

$$(m-1)(m+5)=0 \Leftrightarrow m=1 \quad \text{یا} \quad m=-5.$$

m	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$\Delta=4(m+2)^2-36$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بنابراین بازهٔ قابل قبول برای m عبارت است از $(-5,1)$.

(ii)داریم $f'(x)=3\cos 3x-27\cos x$ و با توجه به اتّحاد $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$ می‌توانیم بنویسیم

$$f'(x)=3(4\cos^3 x-3\cos x)-27\cos x$$
$$=12\cos^3 x-36\cos x=12\cos x(\cos^2 x-3).$$

بدیهی است که عبارت $(\cos^2 x-3)$ همواره منفی است و لذا شرط آنکه $f'(x)>0$ آن است کـه $\cos x<0$. اما مطابق جدول زیر

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	

بنابراین در بازهٔ $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ داریم $f'(x)>0$ و لذا $f(x)$ در این بازه صعودی اکید است.

(iii) برای $x\in(0,1)$ داریم $|x-1|=-(x-1)$ و لذا

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x+2}=\frac{-(x-1)}{x+2}=\frac{1-x}{x+2}$$

و بنابراین $f'(x)=\frac{-3}{(x+2)^2}$. ملاحظه می‌شود که در بازهٔ $I_1=(0,1)$ همواره $f'(x)<0$ و در نتیجه تابع $f(x)$ در $I_1=(0,1)$ نزولی اکید است.

برای $x\in(1,2)$ داریم $|x-1|=x-1$ و لذا

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x+2}=\frac{x-1}{x+2}$$

و بنابراین $f'(x)=\frac{3}{(x+2)^2}$. ملاحظه می‌شود که در بازهٔ $I_2=(1,2)$ همواره $f'(x)>0$ و در نتیجه تابع $f(x)$ در $I_2=(1,2)$ صعودی اکید است.

(iv) نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. از روی ضابطهٔ تابع دیده می‌شود که به ازای $0\le x\le 1$، $f(x)=0$. اگر $x\le 0$، آنگاه $f'(x)=-2x$ و به ازای $x<0$ همواره $f'(x)>0$. پس در $(-\infty,0]$ تابع f صعودی اکید است. اگر $x\ge 1$،آنگاه $f'(x)=2x$ و بنابراین $f'(x)>0$ ، یعنی در $[1,+\infty)$ هم تابع f صعودی اکید است. امّا همانطور که از روی شکل هم دیده می‌شود در بازه $[1,0]$ تابع f دارای مقدار ثابت صفر است. بنابراین می‌توانیم بگوییم تابع f در R صعودی (و نه صعودی اکید) است.

شکل ۴ . ۲۸

(v) به کمک جدول زیر ضابطه تابع را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم.

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$2x-4$	$-$	0	$+$		$+$
$3x-9$	$-$		$-$	0	$+$
$\|2x-4\|$	$-2x+4$	0	$2x-4$		$2x-4$
$\|3x-9\|$	$-3x+9$		$-3x+9$		$3x-9$
$f(x)$	$-5x+13$		$-x+5$		$5x-13$

و بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}-5x+13 & , \ x\le 2\\ -x+5 & , \ 2<x<3\\ 5x-13 & , \ 3\le x\end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود که

$$f'_-(2)=-5\ ,\quad f'_+(2)=-1$$
$$f'_-(3)=-1\ ,\quad f'_+(3)=5$$

و بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-5 & , \ x<2\\ \text{وجود ندارد} & , \ x=2\\ -1 & , \ 2<x<3\\ \text{وجود ندارد} & , \ x=3\\ 5 & , \ 5<x.\end{cases}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ ۱۵، و با توجه به این تابع f در نقاط 2 و 3 پیوسته است نتیجه می‌گیریم که تابع f در بازه‌های $(-\infty,2]$ و $[2,3]$ نزولی (اکید) و در بازهٔ $[3,+\infty)$ صعودی (اکید) است.

(vi) ابتدا پیوستگی تابع f را در نقاطی که ضابطهٔ تابع عوض می‌شود بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(x+1)=0 \qquad , \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=0=f(0)$$

پس تابع f در $x=-1$ پیوسته است. همچنین

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} arc\,tg\, x = arc\,tg\, 0 = 0$$

لذا تابع f در $x=0$ هم پیوسته است. اکنون

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & , \ x<-1 \\ 0 & , \ -1<x<0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & , \ 0<x \end{cases}$$

و با توجه به نکته ۳ دیده می‌شود که تابع بر R صعودی است.

قضیهٔ زیر در اثبات برخی از نامساوی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد

قضیهٔ ۱۶ : فرض کنیم توابع f و g بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشند و فرض کنیم $f(a)=g(a)$. به علاوه فرض کنیم که به ازای هر $x\in(a,b)$،

$$f'(x)>g'(x).$$

در این صورت به ازاء هر $x\in(a,b]$ داریم $f(x)>g(x)$.

اثبات. فرض کنیم $h(x)=f(x)-g(x)$. پس به ازای هر $x\in(a,b)$ داریم $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$. اکنون $a<x\le b$ فرض کرده و در بازهٔ $[a,x]$ قضیهٔ مقدار میانگین را برای تابع h بکار می‌بریم ؛

نقطه‌ای مانند $c\in(a,x)$ وجود دارد به‌طوری که $h'(c)=\dfrac{h(x)-h(a)}{x-a}$.

امّا $h(a)=f(a)-g(a)=0$ و بنابرفرض $h'(c)>0$. لذا

$$\frac{h(x)-0}{x-a}=h'(c)>0 \Leftrightarrow h(x)=(x-a)h'(c)>0\,.$$

نتیجه می‌گیریم که $h(x)=f(x)-g(x)>0$، یعنی، $f(x)>g(x)$.

مثال ۲۱ : (i)ثابت کنید که به ازای هر $x>0$،

$$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x.$$

(ii)اگر $n\in N$ و $x>0, n\ge 2$، ثابت کنید که

$$\sqrt[n]{1+x}<1+\frac{1}{n}x.$$

(iii) به ازای هر $0<x<\pi$ ثابت کنید که

$$1-\cos x<\frac{x^2}{2}.$$

حل. (i) اولاً فرض کنیم $f(x)=x$, $g(x)=\ln(1+x)$. چون $x>0$ بدیهی است که $g'(x)=\frac{1}{1+x}<1=f'(x)$. لذا با استفاده از قضیهٔ ۱۶، $\ln(1+x)<x$.

ثانیاً فرض کنیم $f(x)=\ln(1+x)$ و $g(x)=x-\frac{1}{2}x^2$. داریم $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ و $g'(x)=1-x$. بدیهی است که اگر $x\geq 1$، آنگاه $f'(x)>g'(x)$. اگر $0<x<1$ آنگاه

$$f'(x)>g'(x)\Leftrightarrow\frac{1}{1+x}>1-x\Leftrightarrow(1-x)(1+x)<1\Leftrightarrow 1>1-x^2$$

که همواره (به ازای $x>0$) درست است. لذا به ازای هر $x>0$ ، $f'(x)>g'(x)$ و با

استفاده از قضیه ۱۶ ، $\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$. خلاصه برای هر $x>0$ داریم

$$x-\frac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x\ .$$

(ii) فرض کنیم $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$ و $g(x)=1+\frac{1}{n}x$. بدیهی است که f و g در بازهٔ $[0,+\infty)$ پیوسته و در بازهٔ $(0,+\infty)$ مشتق‌پذیر هستند و داریم

$$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}\quad \text{و}\quad g'(x)=\frac{1}{n}.$$

به ازای هر $x>0$، و به دلیل آن که $n\geq 2$، $(1+x)^{n-1}>1$ و لذا $\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}>1$.
در نتیجه $n.\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}>n$ و بنابراین $f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}<\frac{1}{n}$ ، یعنی، $f'(x)<g'(x)$.
اکنون قضیهٔ ۱۶ نتیجه می‌دهد که $f(x)<g(x)$ ،یعنی، $\sqrt[n]{1+x}<1+\frac{1}{n}x$.

(iii)فرض کنیم $f(x)=1-\cos x$ و $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$. داریم $f'(x)=\sin x$ و $g'(x)=x$. با توجه به این که $0<x<\pi$، پس $\sin x<x$، یعنی، $f'(x)<g'(x)$. اکنون بنابر قضیهٔ ۱۶، $1-\cos x<\dfrac{x^2}{2}$.

مثال ۲۲ : بازه‌های یکنوائی توابع زیر را تعیین کنید :

(a) $f(x)=2x^2-\ln x$ (b) $f(x)=2x^3-9x^2-24x+7$

(c) $f(x)=x^2e^{-x}$ (d) $f(x)=\cos(\dfrac{\pi}{x})$.

حل . (a) تابع به ازای هر $x>0$ تعریف شده است. مشتق را بدست می‌آوریم :

$$f'(x)=4x-\frac{1}{x}.$$

تابع f صعودی اکید است هر گاه $4x-\dfrac{1}{x}>0$ ، یعنی، $x>\dfrac{1}{2}$.

تابع f نزولی اکید است هر گاه $4x-\dfrac{1}{x}<0$، یعنی، $x<\dfrac{1}{2}$.

(b) مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x)=6x^2-18x-24=6(x^2-3x-4).$$

دیده می‌شود که

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ یا } x=4.$$

x	$-\infty$	-1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	صعودی اکید		نزولی اکید		صعودی اکید	

مشاهده می‌شود که تابع f در بازه‌های $(-\infty,-1)$ و $(4,+\infty)$ صعودی اکید و در بازهٔ $(-1,4)$ نزولی اکید است.

(c) مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$$

و چون همواره $e^{-x} > 0$،

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = 2\,.$$

به سادگی دیده می‌شود که در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(2, +\infty)$ داریم $f'(x) < 0$ و تـابع f نزولـی اکید است و در بازهٔ $(0,2)$ داریم $f'(x) > 0$ و لذا تابع f صعودی اکید است. به شکل زیـر توجـه نمایید.

شکل ۴ .۲۹

(d) تابع $f(x) = \cos(\frac{\pi}{x})$ بر سرتاسر اعداد حقیقی R به غیر از $x = 0$ تعریف شده و مشتق‌پذیر است و داریم

$$f'(x) = -\sin(\frac{\pi}{x}) \times (\frac{-\pi}{x^2}) = \frac{\pi}{x^2} \sin\frac{\pi}{x}.$$

چون همواره $\frac{\pi}{x^2} > 0$ $(x \neq 0)$ بدیهی است که علامت $f'(x)$ به وسیلهٔ $\sin\frac{\pi}{x}$ تعیین می‌گردد.

اولاً، $\sin(\frac{\pi}{x}) > 0$ هر گاه

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \qquad\qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

ثانیا، $\sin(\frac{\pi}{x}) < 0$ هرگاه

$$(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < 2(k+1)\pi.$$

بنابراین تابع f در بازه‌های $(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k})$ صعودی اکید و در بازه‌های $(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1})$ نزولی اکید است.

مثال ۲۳ : (i)ثابت کنید به ازای $0 < x \le 1$ نامساوی‌های زیر برقرارهستند:

$$x - \frac{x^3}{3} < arc\,tg\,x < x - \frac{x^3}{6}.$$

(ii) ثابت کنید که برای $0 \le p \le 1$ و هر دو عدد مثبت b, a نامساوی زیر برقرار است:

$$(a+b)^p \le a^p + b^p.$$

حل. (i) تنها نامساوی طرف راست را ثابت می‌کنیم (نامساوی طرف چپ نیز بـه طریـق مشـابه اثبات می‌گردد).

تابع f با ضابطهٔ $f(x) = arctg\,x - x + \frac{x^3}{6}$ را در نظر گرفته و مشتق آن را محاسبه می‌نماییم :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}.$$

تابع f بر سرتاسر اعداد حقیقی R پیوسته است. به ویژه در بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ پیوســته بـوده و در بازهٔ باز $(0,1)$، $f'(x) < 0$. بنابراین f در بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ نزولی اکید بوده و در نتیجـه، بـه ازای هر x ، که $0 < x \le 1$، نامساوی $f(x) < f(0)$ یا

$$arctg\,x - x + \frac{x^3}{6} < 0$$

برقرار است، که از آن نتیجه می‌گیریم

$$arctg\,x < x - \frac{x^3}{6}.$$

(ii)با تقسیم طرفین نامساوی بر b^p بدست می‌آوریم

$$(\frac{a}{b} + 1)^p \le (\frac{a}{b})^p + 1$$

یا

$$(1+x)^p \le 1 + x^p \qquad (*)$$

که در آن $x = \frac{a}{b}$.

اکنون نشان می‌دهیم که نامساوی (*) به ازای هر $x > 0$ برقرار است. تابع f را با ضابطهٔ

$$f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p \quad ; \ x \ge 0$$

معرفی می‌نماییم. مشتق این تابع عبارت است از

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1+x)^{p-1} = p\left[\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1+x)^{1-p}}\right].$$

این مشتق همواره مثبت است، زیرا، بنابر فرض، $x > 0, 1-p \geq 0$. (دقت کنید که تنها در $p=1$ بدست می‌آوریم $f'(x) = 0$). بنابراین تابع در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی اکید است، یعنی،

$$f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p > f(0) = 0$$

که از آنجا $1 + x^p > (1+x)^p$ و اثبات کامل می‌شود. در حالت خاصی که $p = \frac{1}{n}$ (که در آن $n \in N$) قرار دهیم، بدست می‌آوریم

$$\sqrt[n]{a+b} \leq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \quad (n \geq 1).$$

۴ . ۴ آزمونهای مشتق .

در تعیین نقاط اکسترمم یک تابع (نسبی یا مطلق) نقاط بحرانی آن تابع را به دست آورده و نشان دادیم که نقاط اکسترمم (در صورت وجود) را بایستی در بین نقاط بحرانی جستجو کنیم. همچنین دیدیم که یک نقطهٔ بحرانی لزوماً نقطهٔ اکسترمم نیست. اکنون با استفاده از قضیهٔ ۱۵ (که خود به استناد قضیهٔ مقدار میانگین ثابت شده است) ملاکی برای یافتن ماکزیمم و می‌نیمم نسبی یک تابع ارائه می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۷ (آزمون مشتق اول برای اکسترمم نسبی) :

فرض کنیم تابع f بر تمام نقاط بازهٔ باز (a,b) شامل نقطهٔ c پیوسته بوده، و فرض کنیم که f' بر تمام نقاط (a,b) به استثنای احتمالاً c وجود داشته باشد. در این صورت :

(i) اگر به ازای هر $x \in (a,c)$ ، $f'(x) > 0$ و به ازای هر $x \in (c,b)$ ، $f'(x) < 0$ آنگاه تابع f در نقطهٔ c دارای یک می‌نیمم نسبی است.

(ii)اگر به ازای هر $x \in (a,c)$ ، $f'(x) < 0$ و به ازای هر $x \in (c,b)$ ، $f'(x) > 0$ آنگاه تابع f در نقطهٔ c دارای یک ماکزیمم نسبی است.

اثبات. (i)چون در بازهٔ باز (a,c) داریم $f'(x) > 0$ ، از قضیهٔ ۱۵ نتیجه می‌گیریم که تابع f بر $[a,c]$ صعودی اکید است. چون در بازهٔ باز (c,b) داریم $f'(x) < 0$ ، از قضیهٔ ۱۵ نتیجه می‌گیریم که تابع f بر $[c,b]$ نزولی اکید است. اکنون اگر $x_1 \in [a,c]$ و $x_1 \neq c$ آنگاه، به دلیل صعودی اکید بودن f بر $[a,c]$، $f(x_1) < f(c)$. همچنین اگر $x_2 \neq c, x_2 \in [c,b]$ آنگاه، به دلیل

نزولی اکید بودن f بر $[c,b]$، $f(c) > f(x_2)$. بنابراین به ازای هر $x \in [a,b]$ و $x \neq c$ $f(c) > f(x)$. به عبارت دیگر، f در نقطهٔ c دارای یک ماکزیمم نسبی است.
(ii)اثبات این قسمت مشابه (i) است و آن را به عنوان تمرین ثابت کنید. شکل‌های زیر توصیف قسمت‌های (i) و (ii) است.

شکل ۴ . ۳۰

تبصره : آزمون مشتق اول برای اکسترمم نسبی در حقیقت بیان می‌کند که اگر f در c پیوسته بوده و $f'(x)$ تغییر علامت جبری از مثبت به منفی بدهد وقتی x درگذرِ از c افزایش می‌یابد، آنگاه f در نقطهٔ c دارای یک ماکزیمم نسبی است و اگر $f'(x)$ تغییر علامت جبری از منفی به مثبت بدهد وقتی x درگذرِ از c افزایش می‌یابد، آنگاه f دارای یک می‌نیمم نسبی در نقطهٔ c است.

شکل‌های (i) و (ii) در بالا توصیف حالت‌هایی است که $f'(c)$ وجود دارد. در شکل (الف) زیر نمودار تابعی مانند f نشان داده شده است که دارای یک ماکزیمم نسبی در نقطه c است، امّا $f'(c)$ موجود نیست، در عین حال وقتی $x < c$، $f'(x) > 0$ و وقتی $x > c$، $f'(x) < 0$. در شکل (ب) زیر نمودار تابعی مانند f نشان داده شده است که برای آن c یک نقطهٔ بحرانی است، و $f'(x) < 0$ وقتی $x < c$، و نیز $f'(x) < 0$ وقتی $x > c$؛ بنابراین تابع f در نقطه c دارای یک اکسترمم نسبی نیست.

شکل ۴ . ۳۱

به طور خلاصه، برای تعیین اکسترمم نسبی تابعی مانند f به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

(۱) $f'(x)$ را پیدا می‌کنیم .

(۲) نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم، یعنی، مقادیری از x را که برای آن‌ها $f'(x)=0$ یا برای آن‌ها $f'(x)$ وجود ندارد.

(۳) قضیهٔ آزمون مشتق اول برای اکسترمم نسبی را بکار می‌بریم.

در مثال‌های زیر این شیوه توضیح داده شده است.

مثال ۲۴ : با استفاده از آزمون مشتق اول برای اکسترمم نسبی، اکسترمم نسبی توابع زیر را پیدا کنید :

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1 \ (i) \qquad f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}} \ (ii)$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & , x<3 \\ 8-x & , x\geq 3 \end{cases} \ (iii) \qquad f(x)=\frac{\sin x}{\sin x-2}, x\in[0,2\pi] \ (iv)$$

(v) $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ در بازهٔ باز $(0,2\pi)$.

حل. (i) داریم

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-3)(x-1)$$

و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3 \ \text{یا} \ x=1 .$$

چون $f'(x)$ به ازای هر $x\in R$ موجود است نقاط بحرانی تابع f عبارتنداز $x=3, x=1$. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		صعودی اکید		نزولی اکید		صعودی اکید	

دیده می‌شود که در $x=1$ تابع f دارای ماکزیمم نسبی $f(1)=5$ و در $x=3$ تابع f دارای می‌نیمم نسبی $f(3)=1$ می‌باشد. به شکل زیر توجه نمایید.

شکل۴ . ۳۲

(ii) داریم $f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)=\frac{4(x+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

چون در $x=0$، $f'(x)$ موجود نیست و $f'(x)=0$ معادل با $x=-1$ می‌باشد، بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتند از $0,-1$. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	وجود ندارد	$+$	

$f(x)$	نزولی اکید	صعودی اکید	صعودی اکید

دیده می‌شود که در $x=-1$ تابع f دارای می‌نیمم نسبی -3 است و در $x=0$ تابع f اکسترمم نسبی ندارد.

به شکل زیر توجه نمایید.

شکل۴ .۳۳

(iii) اگر $x<3$ آنگاه $f'(x)=2x$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

اگر $x>3$ آنگاه $f'(x)=-1$. چون $f'_+(3)=-1,\ f'_-(3)=6$ نتیجه می‌گیریم که $f'(3)$ موجود نیست. بنابراین 3 و 0 نقاط بحرانی تابع f هستند. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	وجود ندارد	$-$
$f(x)$	نزولی اکید		صعودی اکید		نزولی اکید

دیده می‌شود که تابع f در $x=0$ دارای می‌نیمم نسبی $f(0)=-4$ و در $x=3$ دارای ماکزیمم نسبی $f(3)=5$ است.

شکل۴ .۳۴

(iv) داریم $f'(x)=\frac{\cos x(\sin x-2)-\cos x\sin x}{(\sin x-2)2}=\frac{-2\cos x}{(\sin x-2)^2}$

و

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -2\cos x=0\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

و بنابراین در $[0,2\pi]$ عدد صحیح k می‌تواند مقادیر 0و 1 را اختیار نماید.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	
$f(x)$	نزولی اکید	صعودی اکید	نزولی اکید	

نقاط بحرانی تابع در $[0,2\pi]$ منحصر هستند به $\frac{\pi}{2}$و $\frac{3\pi}{2}$. در $x=\frac{\pi}{2}$ تابع f دارای می‌نیمم نسبی $f(\frac{\pi}{2})=-1$ و در $x=\frac{3\pi}{2}$ تابع f دارای ماکزیمم نسبی $f(\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{3}$ می‌باشد.

(v) داریم $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$ و $f'(x)=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$.

لذا در بازهٔ باز $(0,2\pi)$ نقاط بحرانی تابع عبارتنداز $\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	
$f(x)$	نزولی اکید	صعودی اکید	نزولی اکید	

تابع f در $x=\frac{\pi}{3}$ دارای می‌نیمم نسبی و در $x=\frac{5\pi}{3}$ دارای ماکزیمم نسبی است. به شکل زیرتوجه نمایید.

شکل ۴ .۳۵

در صفحات قبل آموختیم که چگونه می‌توان با بررسی علامت جبری f' در بازه‌های چپ و راست نقطهٔ c معیّن نمود که آیا تابعی مانند f در نقطه‌ای بحرانی مانند c دارای ماکزیمم نسبی یا می‌نیمم نسبی هست یا خیر ؟ آزمون دیگری برای اکسترمم نسبی وجود دارد که تنها دربرگیرنده نقطهٔ بحرانی c است و کاربرد آن اغلب آسانتر می‌باشد. این روش به **آزمون مشتق دوم برای اکسترمم نسبی** معروف بوده و در قضیهٔ زیر بیان می‌گردد.

قضیهٔ ۱۸ : (آزمون مشتق دوم برای اکسترمم نسبی):

فرض کنیم c یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که در آن $f'(c)=0$ ، و فرض کنیم f' به ازای تمام مقادیر x در یک بازهٔ باز شامل c وجود داشته باشد. فرض کنیم $f''(c)$ موجودباشد. در این صورت

(i)اگر $f''(c)<0$ ، آنگاه f دارای یک ماکزیمم نسبی در c است ؛

(ii)اگر $f''(c)>0$ ، آنگاه f دارای یک می‌نیمم نسبی در c است.

اثبات. (i) بنابر فرض، $f''(c)$ موجود و منفی است، پس داریم

$$f''(c)=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0\,.$$

لذا بنابر قضیهٔ ۲، بازهٔ بازی مانند I شامل نقطهٔ c وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\neq c$ در I

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0 \quad (1)$$

فرض کنیم I' بازهٔ بازی باشد شامل تمام مقادیر x در I که برای آن‌ها $x<c$، بنابراین، c نقطهٔ انتهایی راست بازهٔ باز I' است. فرض کنیم I'' بازهٔ بازی باشد شامل تمام مقادیر x در I که برای آن‌ها $x>c$، بنابراین c نقطهٔ انتهایی چپ بازهٔ باز I'' است.

در این صورت اگر $x \in I'$ آنگاه $(x-c)<0$، و از نامساوی (1) نتیجه می‌شود که $f'(x)-f'(c)>0$ یا، به عبارت معادل، $f'(x)>f'(c)$. اگر x در I'' باشد، $x-c>0$، و از (1) نتیجه می‌شود که $f'(x)-f'(c)<0$ یا، به عبارت معادل، $f'(x)<f'(c)$.
امّا به دلیل آن که $f'(c)=0$ ، نتیجه می‌گیریم که اگر x در I' باشد، $f'(x)>0$ ، و اگر x در I'' باشد، $f'(x)<0$. بنابراین، $f'(x)$ وقتی x درگذرِ از c افزایش می‌یابد تغییر علامت جبری از مثبت به منفی می‌دهد و لذا، بنابر قضیهٔ ۱۷، تابع f در نقطهٔ c دارای یک ماکزیمم نسبی است.
(ii) اثبات این قسمت مشابه (i) است و به عنوان تمرین آن را ثابت کنید.

تبصرهٔ مهّم : (۱) در قضیهٔ فوق اگر $f''(c)=0$ ، آنگاه در مورد وجود یا عدم وجود اکسترمم تابع در نقطهٔ c به استناد قضیهٔ بالا هیچ اظهار نظری نمی‌توانیم بکنیم.
(۲) فرض کنیم $f'(c)=f''(c)=...=f^{n-1}(c)=0$ امّا $f^{(n)}(c)\neq 0$.
حالت اوّل : n زوج است. در این صورت اگر $f^{(n)}(c)>0$ آنگاه تابع f در c دارای یک می‌نیمم نسبی است و اگر $f^{(n)}(c)<0$ آنگاه تابع f در c دارای یک ماکزیمم نسبی است.
حالت دوم : n فرد است، در این صورت تابع f در c دارای اکسترمم نسبی نمی شد..

مثال ۲۵. اکسترمم نسبی توابع زیر را با استفاده از آزمون مشتق دوم برای اکسترمم نسبی توابع پیدا کنید :

(i) $f(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2$، (ii) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ ،

(iii) $f(x)=(\frac{1}{2}-x)\cos x+\sin x-\frac{x^2-4}{4}$ که در آن $0\le x\le\frac{\pi}{2}$،

(iv) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ که در آن $x\in R-\{0\}$ ،

(v) $f(x)=\frac{50}{3x^4+8x^3-18x^2+60}$ ، (vi) $f(x)=\sqrt{e^{x^2}-1}$.

حل. (i) داریم $f'(x)=4x^3+4x^2-8x$ و $f''(x)=12x^2+8x-8$. با قرار دادن $f'(x)=0$ بدست می‌آوریم

$$4x(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow 4x(x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=-2 \quad \text{یا} \quad x=1.$$

بنابراین نقاط بحرانی f عبارتنداز $1,0,-2$. با یافتن علامت مشتق دوّم در این نقاط معیّن می‌کنیم که در کدامیک از این نقاط بحرانی تابع دارای اکسترمم نسبی است. به جدول زیر توجه نمایید.

x	-2	0	1
$f(x)$	$\frac{-32}{3}$	0	$\frac{-5}{3}$
$f'(x)$	0	0	0
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
نتیجه گیری	f دارای می نیمم نسبی است	f دارای ماکزیمم نسبی است	f دارای می نیمم نسبی است

(ii) تابع f به ازای هر $x \in R$ مشتق‌پذیر است، و بنابراین تنها نقاط بحرانی f ، نقاطی هستند که در آن‌ها مشتق

$$f'(x) = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x$$
$$= 4(\sin^2 x - \cos^2 x)\sin x\cos x = -4\cos 2x\sin x\cos x$$

مساوی با صفر باشد. این نقاط عبارتنداز

$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ که در آن‌ها $\sin x = 0$،

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ...$ که در آن‌ها $\cos x = 0$،

$x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, ...$ که در آن‌ها $\cos 2x = 0$.

مشتق دوّم تابع f را محاسبه می‌کنیم ؛

$$f''(x) = 12\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x + 12\cos^2 x\sin^2 x - 4\cos^4 x$$
$$= 24\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^4 x - 4\cos^4 x,$$

و بنابراین

$f''(x) = 24(0) - 4(0) - 4(1) = -4$ هرگاه $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ ،

$f''(x) = 24(0) - 4(1) - 4(0) = -4$ هر گاه $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ...$ ،

$f''(x) = 24(\frac{1}{4}) - 4(\frac{1}{4}) - 4(\frac{1}{4}) = 4$ هر گاه $x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, ...$.

لذا بنابر آزمون مشتق دوم، f دارای ماکزیمم نسبی در نقـاط $x=0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi,\pm\frac{3\pi}{2},\pm 2\pi,...$ و دارای می‌نیمم نسبی در نقاط $x=\pm\frac{\pi}{4},\pm\frac{3\pi}{4},....$ می‌باشد. نشان دهید که ماکزیمم نسبی برابر بـا 1 و می‌نیمم نسبی برابر با $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

(iii)مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x)=-\cos x-(\frac{1}{2}-x)\sin x+\cos x-\frac{(2x-1)}{4}$$
$$=-(\frac{1}{2}-x)\sin x-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})=(x-\frac{1}{2})(\sin x-\frac{1}{2})$$

و

$$f'(x)=0\Leftrightarrow(x-\frac{1}{2})(\sin x-\frac{1}{2})=0\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0 \quad \text{یا} \ \sin x-\frac{1}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad \text{یا} \ \sin x=\frac{1}{2}$$

و چون در بازهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ تابع f مشتق‌پذیر است لذا $x=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{\pi}{6}$ تنها نقاطی در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ هستند که در آن‌ها $f'(x)=0$. اکنون مشتق دوم تابع f را محاسبه می‌کنیم :

$$f''(x)=\sin x-\frac{1}{2}+(x-\frac{1}{2})\cos x.$$

لذا

$$f''(\frac{1}{2})=\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\cos\frac{1}{2}=\sin\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

و با توجه به این که به ازای $0<x<\frac{\pi}{2}$ داریم $\sin x<x$ بنابراین $f''(\frac{1}{2})<0$ یعنـی تـابع f در $x=\frac{1}{2}$ دارای یک ماکزیمم نسبی است. همچنین

$$f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}+(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2})\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2})\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{\pi-3}{6})>0.$$

لذا تابع f در $x=\frac{\pi}{6}$ دارای می نیمم نسبی است.

(iv) مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3} \quad \text{و} \quad f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{2}{x^3}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{x^3}$$
$$\Leftrightarrow x^4-1=0\Leftrightarrow(x^2+1)(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=1 \quad \text{یا} \ x=-1.$$

اکنون داریم $f''(x)=2+\frac{6}{x^4}$, $f''(\pm 1)=8>0$.

بنابراین تابع f در نقاط $x=\pm 1$ دارای یک می‌نیمم نسبی است.

(v) در اینجا ساده تر است که اکسترمم تابع $f_1(x)=3x^4+8x^3-18x^2+60$ را پیدا کنیم.
چون $f_1'(x)=12x^3+24x^2-36x=12x(x^2+2x-3)$, و $f_1''(x)=12(3x^2+4x-3)$
داریم $x=1$ یا $x=0$ یا $x=-3 \quad \Leftrightarrow f_1'(x)=0$.
اکنون $f_1''(-3)>0$ ، بنابراین در نقطه $x=-3$ تابع $f_1(x)$ که دارای یک می‌نیمم نسبی است و تابع مفروض $f(x)$ دارای یک ماکزیمم نسبی است که برابر با $f(-3)=-\frac{2}{3}$ می‌باشد. توضیح این مطلب مفید است که بازه ای باز مانند (α,β) شامل نقطهٔ -3 وجوددارد به طوری که به ازای هر $x\in(\alpha,\beta)$ و $f(x)<f(-3), x\neq -3$. به دلیل آن که $f(-3)\neq 0$ و چون $\lim_{x\to -3} f(x)=f(-3)$ پس بازهٔ بازی شامل -3 مانند I یافت می‌شود که به ازای هر $x\in I$ ، $f(x)\neq 0$. از طرفی چون تابع f_1 در $x=-3$ دارای یک می‌نیمم نسبی است پس بازهٔ بازی مانند I' شامل -3 وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\in I'$ و $x\neq -3$ داریم $f_1(-3)<f_1(x)$ ، اکنون فرض کنیم $I\cap I'=(\alpha,\beta)$ ، یعنی، (α,β) بازهٔ بازی است شامل -3، که در این بازه، $f(x)\neq 0$ و نیز $f_1(-3)<f_1(x)$ (هرگاه $x\neq -3$). امّا دیده می‌شودکه $\frac{1}{f(-3)}<\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f_1(-3)<f_1(x)$.
چون در بازهٔ (α,β)، $f(-3)=\frac{-2}{3}<0$ و $f(x)$ در این بازه با $f(-3)$ هم علامت است، پس اگر طرفین آخرین نامساوی را در عدد مثبت $f(-3)f(x)$ ضرب کنیم خواهیم داشت $f(x)<f(-3)$. خلاصه به ازای هر $x\in(\alpha,\beta)$ داریم $f(x)<f(-3)$ یعنی تابع f در $x=-3$ دارای یک ماکزیمم نسبی است.
همچنین دیده می‌شود که $f_1''(0)<0$ ، بنابراین در $x=0$ تابع f_1 دارای یک ماکزیمم نسبی است و (با استدلالی مشابه بالا) تابع f دارای می‌نیمم نسبی $f(0)=\frac{5}{6}$ می‌باشد. بالاخره $f_1''(1)>0$؛ بنابراین در $x=1$ تابع f_1 دارای می‌نیممی نسبی و لذا تابع f دارای ماکزیممی نسبی برابر با $f(1)=\frac{50}{53}$ می‌باشد.
(vi) در اینجا ساده تر است که نقاط اکسترمم تابع $f_1(x)=e^{x^2}-1$ را که بر نقاط اکسترمم تابع $f(x)$ منطبق هستند پیدا کنیم (توجه کنید که همواره $e^{x^2}-1\geq 0$ و $f(x)<f(x')$ معادل است با $f_1(x)<f_1(x')$). مشتق تابع f_1 را محاسبه می‌کنیم :

$$f_1'(x)=2xe^{x^2} \quad \text{و} \quad f_1'(x)=0\Leftrightarrow x=0 .$$

همچنین داریم $f_1''(x)=2e^{x^2}(1+2x^2)$ و $f_1''(x)=2>0$.
بنابراین تابع f_1 در $x=0$ دارای می‌نیممی نسبی است و لذا تابع f در $x=0$ دارای می نیممی نسبی است.

مثال ۲۶ : اکسترمم نسبی توابع زیر را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید :

(a) $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}$

(b) $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}$.

حل.در این مثال از تبصرهٔ مهمی که بعد از قضیهٔ ۱۸ بیان نمودیم استفاده می‌کنیم.

(a)داریم

$$f'(x)=-\sin x+x-\frac{x^2}{2!}\ ;\ f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\cos x+1-x\ ;\ f''(0)=0$$
$$f'''(x)=\sin x-1\ ,\ f'''(0)=-1\neq 0$$

و بنابراین اولین مشتق غیرصفر در نقطهٔ $x=0$ مشتق مرتبهٔ سوم است، یعنی، از مرتبه فرد است. بنابراین تابع f در $x=0$ اکسترمم نسبی ندارد.

(b) داریم

$$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\ ;\ f'(0)=0$$
$$f''(x)=-\sin x+x-\frac{x^2}{2!}\ ;\ f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-\cos x+1-x\ ,\ f'''(0)=0$$
$$f^{(4)}(x)=\sin x-1,\qquad f^{(4)}(0)=-1<0$$

و بنابراین اولین مشتق غیرصفر در نقطه $x=0$ از مرتبهٔ چهارم است، یعنی، از مرتبهٔ زوج است. چون $f^{(4)}(0)=-1<0$ پس تابع f در $x=0$ دارای ماکزیممی نسبی است.

مثال ۲۷ : اکسترمم نسبی توابع زیر را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید :

(الف) $f(x)=-x^4$، (ب) $g(x)=x^2+\cos^2 x$، (ج) $h(x)=\tan^{-1}x=arctgx$.

حل. **روش اوّل** : از آزمون مشتق اوّل استفاده می‌کنیم.

(الف) $f(x)=-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3$. بنابراین اگر $x<0$ آنگاه $f'(x)>0$ و اگر $x>0$ آنگاه $f'(x)<0$. بنابراین تابع f در $x=0$ دارای یک ماکزیمم نسبی است.

(ب) $g(x)=x^2+\cos^2 x\Rightarrow g'(x)=2x-\sin 2x$. لذا اگر $2x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ آنگاه $g'(x)<0$ و اگر $2x\in(0,\frac{\pi}{2})$ آنگاه $g'(x)>0$. بنابراین تابع g در $x=0$ دارای یک می‌نیمم نسبی است.

(ج) $h(x)=\tan^{-1}x=arc\,tg\,x\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و دیده می‌شود که همواره $h'(x)>0$. پس $h(x)$ در $x=0$ اکسترمم ندارد.

روش دوّم: دیده می‌شود که مشتق دوّم همهٔ این توابع در $x=0$ برابر با صفر است و لذا نمی‌توانیم آزمون مشتق دوّم را بکار بریم. بهر حال می‌توانیم از تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۱۸ استفاده کنیم.

(الف) داریم

$$f''(x)=-9x^2\ ,\ f''(0)=0$$
$$f'''(x)=-18x\ ,\ f'''(0)=0$$
$$f^{(4)}(x)=-18\ ,\ f^{(4)}(0)=-18<0$$

لذا بنابر تبصره (بعد از قضیهٔ ۱۸) تابع f در $x=0$ دارای یک ماکزیمم نسبی است.

(ب)

$$g''(x)=2-2\cos 2x\quad ,\ g''(0)=0$$
$$g'''(x)=4\sin 2x\quad ,\ g'''(0)=0$$
$$g^{(4)}(x)=8\cos 2x\quad ,\ g^{(4)}(0)=8>0$$

پس تابع g در $x=0$ یک دارای می‌نیمم نسبی است.

(ج)

$$h''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\ ,\ h''(0)=0$$
$$h'''(x)=\frac{-2(1+x^2)^2-2(1+x^2)(2x)(-2x)}{(1+x^2)^4}=\frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3}.$$

دیده می‌شود که $h'''(0)=-2<0$، لذا بنابر تبصره (بعد از قضیهٔ ۱۸) چون اولین مشتق غیر صفر تابع h در $x=0$ از مرینهٔ فرد است تابع h در $x=0$ دارای اکسترمم نسبی نمی‌باشد.